

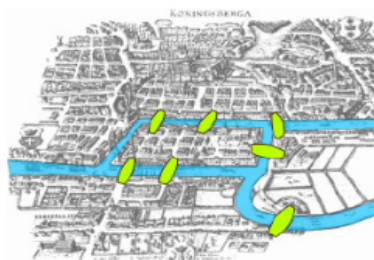
Contents

1	Graphes non orientés	2
1.1	problème de Koenisberg	2
2	Graphes orientés	3
2.1	Graphes valués	4
2.2	Graphe probabiliste	4
2.3	Adjacence	5
2.4	Graphe complet	5
2.5	Degré d'un sommet	6
2.6	Définition d'un sommet isolé	6
2.7	Degré minimal,degré maximal	6
2.8	Voisins d'un sommet	6
2.9	Remarques	6
2.10	Chemin entre deux sommets	7
2.11	Connexité	7
2.12	Définition du chemin et du cycle eulérien	8
2.13	Définition du graphe semi-eulérien et du graphe eulérien	8
2.14	Forte connexité	8

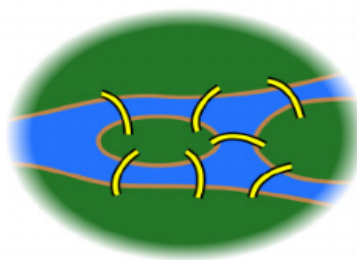
1 Graphes non orientés

1.1 problème de Koenisberg

En 1736, la ville de Königsberg (actuelle Kaliningrad en Russie) est construite autour de deux îles situées sur la Pregel et reliées entre elles par un pont. Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou l'autre des deux îles comme représentés sur la figure ci-dessous.



(a) Plan de la ville de Königsberg



(b) Plan schématique des ponts de Königsberg

FIGURE 1 – Les sept ponts de Königsberg

Les habitants se demandaient s'il existe ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont et de revenir à son point de départ, étant entendu qu'on ne peut traverser la Pregel qu'en passant sur les ponts

À partir de cette date, une théorie des graphes a été progressivement construite afin de répondre à des problèmes de plus en plus complexes.

Plusieurs grands noms de mathématiciens y sont associés : Alexandre-Théophile Vandermonde, Pierre Rémond de Montmort, Abraham de Moivre, Thomas Kirkman, William Rowan Hamilton, Julius Petersen, etc. Au milieu du XIX^{ème} siècle, le mathématicien britannique Arthur Cayley (Richmond, 1821 - Cambridge, 1895) s'intéressa à une classe particulière de graphes : les arbres.

Celle-ci fut abondamment étudiée ensuite à partir de 1937 grâce aux travaux du mathématicien hongrois George Polya (Budapest, 1887 - Palo Alto, 1985). Aujourd'hui, les graphes font partie des objets fondamentaux en algorithmique, en informatique et en mathématiques. En effet, leur structure relationnelle intrinsèque leur permet de modéliser naturellement de très nombreux problèmes dans des domaines variés, comme :

- les réseaux de communications ;
- les réseaux routiers ;
- la gestion de stocks et/ou de production ;
- la logistique ;
- la bio-informatique ;
- les optimisations de chemins ;
- la gestion des ressources mémoires d'un ordinateur ;
- les structures de données ;
- l'algorithmique multithread ;
- le web ;
- le routage sur internet ;
- les réseaux sociaux ;
- le traitement automatique des langues ;

Définition

On appelle graphe non orienté la donnée d'un ensemble $G(S, A)$, où S est un ensemble fini d'éléments appelés sommets, et où A est un multi-ensemble de paires non ordonnées d'éléments de S appelées arêtes.

Remarques

Le nombre de sommets est appelé l'**ordre** du graphe et le nombre d'arêtes est appelé la **taille** du graphe.

- Dans une représentation graphique, les sommets sont représentés par des cercles et les arêtes par des traits.
- Une arête entre deux sommets u et v est notée indifféremment par le couple (u, v) ou par le couple (v, u) .
- Une arête reliant un sommet à lui-même est appelée une **boucle**.
- Deux sommets peuvent être reliés par plusieurs arêtes.
- Si le graphe n'a pas de boucle et a au plus une arête entre deux sommets quelconques, on parle de graphe **simple non orienté**. Dans le cas contraire, on parle de multi-graphe non orienté ou de pseudo-graphe non orienté.

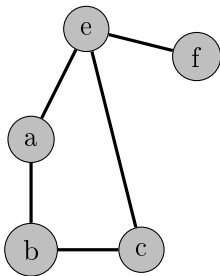
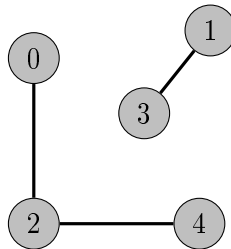


fig (2a)



fig(2b)

Exercice

Décrire la structure du graphe de la figure 2b comme dans l'exemple. Quelle est la particularité de ce graphe ?

Décrire la structure du graphe de la figure 2c comme dans l'exemple. Quelle est la particularité de ce graphe ?

2 Graphes orientés

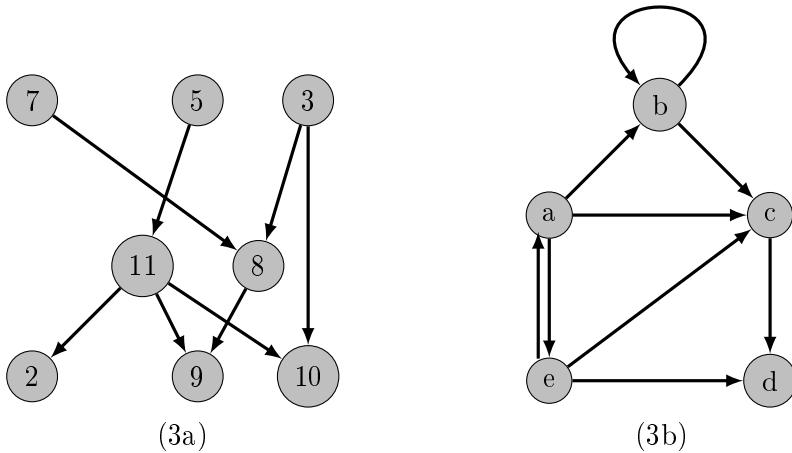
Définition

On appelle graphe orienté la donnée d'un ensemble $G(S, A)$, où S est un ensemble fini d'éléments appelés sommets, et où A est un multi-ensemble de paires ordonnées d'éléments de S appelées arcs.

Remarques

- Le nombre de sommets est appelé l'ordre du graphe et le nombre d'arcs est appelé la taille du graphe.
- Dans une représentation graphique, les sommets sont représentés par des cercles et les arcs par des flèches.
- Un arc partant d'un sommet u et arrivant à un sommet v est noté par le couple (u, v) .

- Un arc reliant un sommet à lui-même est appelé une boucle.
- Deux sommets peuvent être reliés par plusieurs arcs.
- Si le graphe n'a pas de boucle et a au plus un arc entre deux sommets quelconques, on parle de graphe **simple orienté**. Dans le cas contraire, on parle de multi-graphe orienté ou de pseudo-graphe orienté.



2.1 Graphes valués

Définition

On appelle graphe valué $G=(S,A)$ un graphe muni d'une fonction $C : A \longrightarrow \mathbb{R}$ appelée fonction de coût.

Remarques:

- Un graphe valué peut être orienté ou non, simple ou non.
- Dans une représentation graphique, les coûts sont notés sur chacun des arcs (ou arêtes).
- Les coûts peuvent être positifs ou négatifs.

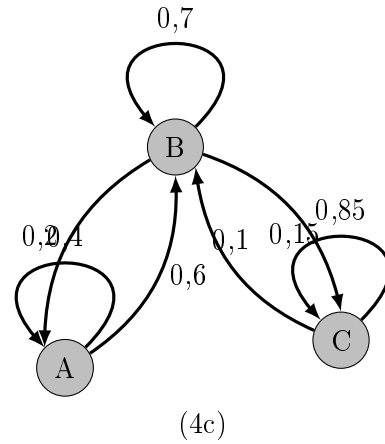
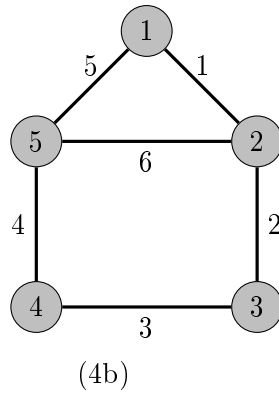
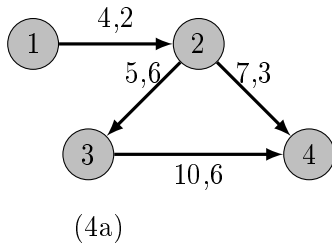
2.2 Graphe probabiliste

Définition

On appelle graphe probabiliste un graphe orienté valué dont les coûts sont positifs et dont la somme des coûts des arcs (ou arêtes) partant de n'importe quel sommet est égale à 1.

Remarques sur les représentations graphiques des graphes

- La représentation graphique d'un graphe n'est pas unique.
- Les arcs (ou arêtes) d'un graphe peuvent se couper.



2.3 Adjacence

Définition

Dans un graphe $G = (S, A)$, orienté ou non, on dit qu'un sommet v est **adjacent à un sommet** u si $(u, v) \in A$.

Remarques:

- Dans un graphe non orienté, la relation d'adjacence est symétrique, c'est-à-dire que si un sommet u est adjacent à un sommet v , alors le sommet v est nécessairement adjacent au sommet u .
- Dans un graphe orienté, un sommet u peut être adjacent à un sommet v sans que le sommet v soit adjacent au sommet u .
- Un sommet u peut être adjacent à lui-même si le graphe possède une boucle.

Exemples:

Dans les graphes des figures 2a et 3b, le sommet b est adjacent au sommet a car l'arc (a,b) (resp. l'arête) existe.

- Dans le graphe de la figure 2a, le sommet a est adjacent au sommet b (relation symétrique).
- Dans le graphe de la figure 3b, le sommet a n'est pas adjacent au sommet b car l'arc (b,a) n'existe pas.

2.4 Graphe complet

Définition

Un graphe est dit complet s'il est simple, non orienté et si tous ses sommets sont adjacents 2 à 2.

2.5 Degré d'un sommet

Définition

Cas des graphes non orientés. On appelle **degré d'un sommet** le nombre d'arêtes qui en partent.

Cas des graphes orientés. On appelle :

- degré entrant d'un sommet le nombre d'arcs qui y arrivent,
- degré sortant d'un sommet le nombre d'arcs qui en partent,
- degré d'un sommet la somme de son degré entrant et de son degré sortant.

Exemples:

Dans le graphe de la figure 2a, le sommet e a pour degré 3.

- Dans le graphe de la figure 2b, le sommet 1 a pour degré 1.
- Dans le graphe de la figure 3a, le sommet 8 a pour degré entrant 2, pour degré sortant 1 et pour degré 2.
- Dans le graphe de la figure 3b, le sommet b a pour degré entrant 2, pour degré sortant 2 et pour degré 2.

2.6 Définition d'un sommet isolé

Dans un graphe, orienté ou non, on appelle sommet isolé un sommet de degré 0.

2.7 Degré minimal, degré maximal

Dans un graphe, on appelle :

- degré minimal le plus petit des degrés de ses sommets ;
- degré maximal le plus grand des degrés de ses sommets.

2.8 Voisins d'un sommet

- Dans un graphe non orienté, On appelle voisin d'un sommet u tout sommet v distinct de u qui lui est adjacent.
- Dans un graphe orienté, un sommet u est voisin d'un sommet v si $u \neq v$ et si $(u, v) \in A$ ou $(v, u) \in A$. Plus précisément, si $(v, u) \in A$, on dit que v est un prédécesseur de u et u est un successeur de v .

2.9 Remarques

- Un sommet peut ne pas avoir de voisin.
- Dans un graphe simple (orienté ou non), le nombre de voisins d'un sommet est égal à son degré.
- Dans un graphe orienté, un sommet peut être à la fois prédécesseur et successeur d'un autre sommet.

2.10 Chemin entre deux sommets

Définition

Définition 1

Dans un graphe, orienté ou non, on appelle :

- **chemin** toute liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet de la liste (hormis le premier) soit adjacent au précédent ;
- **chemin simple** un chemin constitué d'arêtes (ou d'arcs) toutes distinctes ;
- **chemin fermé** un chemin dont le premier et le dernier sommet sont confondus ;
- **cycle** un chemin simple fermé, c'est-à-dire un chemin fermé composé d'arêtes (ou d'arcs) toutes distinctes.

Définition 2

Dans un graphe, orienté ou non, on appelle :

- **longueur d'un chemin** le nombre d'arêtes (ou d'arcs) qui le composent ;
- **distance d'un sommet u à un sommet v** la plus petite des longueurs des chemins partant de u et arrivant à v ;
- **diamètre du graphe** la plus grande distance entre deux sommets quelconques.

Remarques

- Une boucle est un cycle de longueur 1.
- Deux sommets sont situés à une distance 1 l'un de l'autre si et seulement s'ils sont adjacents.
- Dans un graphe non orienté, la distance d'un sommet u à un sommet v est la même que la distance du sommet v au sommet u .
- Dans un graphe orienté, la distance d'un sommet u à un sommet v peut être différente de la distance du sommet v au sommet u .
- S'il n'existe pas de chemin partant d'un sommet u et arrivant à un sommet v , la distance de u à v est $+\infty$.

Exemples

Dans le graphe de la figure 2a :

- le chemin (c,b,a,e,f) est un chemin simple de longueur 4 reliant c à f ;
- la distance entre le sommet c et le sommet f est 2 (obtenue avec le chemin (c,e,f)) ;
- le chemin (c,e,c) est un chemin fermé et le chemin (c,e,a,b,c) est un cycle ;
- le diamètre du graphe est 3 (distance de b à f).

- Dans le graphe de la figure 3a :
 - le chemin $(7,8,9)$ est un chemin simple de longueur 2 ;
 - le sommet 9 est situé à une distance 2 du sommet 7 et le sommet 7 est situé à une distance $+\infty$ du sommet 9 ;
 - il n'y a aucun cycle.

Définition

Un graphe n'admettant pas de cycle est appelé graphe acyclique

2.11 Connexité

Un graphe non orienté est dit **connexe** s'il existe un chemin entre deux sommets quelconques.

2.12 Définition du chemin et du cycle eulérien

Définition

Étant donné un graphe **connexe**, on appelle :

- chemin eulérien un chemin non fermé contenant une et une seule fois toutes les arêtes du graphe ;
- cycle eulérien un cycle contenant une et une seule fois toutes les arêtes du graphe.

2.13 Définition du graphe semi-eulérien et du graphe eulérien

Définition

- Un graphe connexe admettant un chemin eulérien est appelé graphe semi-eulérien.
- Un graphe connexe admettant un cycle eulérien est appelé graphe eulérien.

Remarques:

Si un graphe connexe admet un chemin eulérien entre le sommet u et le sommet v , l'ajout de l'arête (u,v) rend le graphe eulérien.

- La réponse à ces deux questions a été apportée par Euler.

Définition

Théorème Soit G un graphe connexe. Alors :

- G est graphe semi-eulérien si et seulement si sa version sans boucle admet exactement deux sommets de degré impair. Dans ce cas, il existe un chemin eulérien reliant ces deux sommets ;
- G est un graphe eulérien si et seulement si sa version sans boucle a tous ses sommets de degré pair.

2.14 Forte connexité

Définition

Définition

Un graphe orienté est dit fortement connexe si, pour toute paire ordonnée de sommets, il existe un chemin entre ces deux sommets.

Exemples:

Les graphes des figures 3a et 3c ne sont pas fortement connexes et le graphe de la figure 3b est fortement connexe.

Pour les graphes fortement connexes, les définitions « du chemin et cycle eulérien » et « du graphe semi-eulérien et du graphe eulérien » restent valables. Pour de tels graphes, il existe une variante du théorème 1 :

Définition

Théorème

Soit G un graphe fortement connexe. Alors :

- G est un graphe semi-eulérien si et seulement si, dans sa version sans boucle, chaque sommet a les mêmes degrés entrants et sortants sauf exactement deux : un dont le degré entrant est un de plus que le degré sortant et un dont le degré sortant est un de plus que le degré entrant. Dans ce cas, il existe un chemin eulérien reliant ces deux sommets.
- G est un graphe eulérien si et seulement si, dans sa version sans boucle, chaque sommet a les mêmes degrés entrants et sortants.