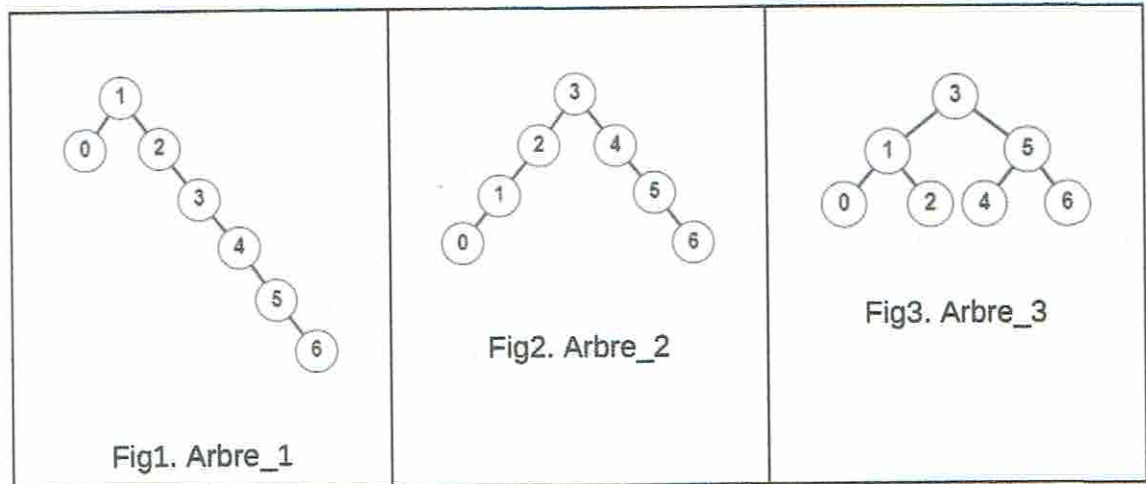


Nous disposons d'une classe ABR pour les arbres binaires de recherche dont les clés sont des entiers :

```
1 class ABR():
2     def __init__(self) :
3         # Initialise une instance d'ABR vide.
4
5     def cle(self):
6         # Renvoie la clé de la racine de l'instance d'ABR.
7
8     def sad(self):
9         # Renvoie le sous-arbre droit de l'instance d'ABR.
10
11    def sag(self):
12        # Renvoie le sous-arbre gauche de l'instance d'ABR.
13
14    def est_vide(self):
15        # Renvoie True si l'instance d'ABR est vide et False
16        sinon.
17
18    def inserer(self, cle_a_inserer):
19        # Insère cle_a_inserer à sa place dans l'instance d'ABR.
```

Considérons ci-dessous trois arbres binaires de recherche :



Dans tout l'exercice, nous ferons référence à ces trois arbres binaires de recherche et utiliserons la classe ABR et ses méthodes.

Partie A

1. Un arbre est une structure de données hiérarchique dont chaque élément est un nœud.

Recopier et compléter le texte ci-dessous en choisissant des expressions parmi au maximum, au minimum, exactement, feuille, racine, sous-arbre gauche et sous-arbre droit :

- Le nœud initial est appelé
 - Un nœud qui n'a pas de fils est appelé
 - Un arbre binaire est un arbre dans lequel chaque nœud a ... deux fils.
 - Un arbre binaire de recherche est un arbre binaire dans lequel tout nœud est associé à une clé qui est :
 - supérieure à chaque clé de tous les nœuds de son ...
 - inférieure à chaque clé de tous les nœuds de son
2. Donner dans l'ordre les clés obtenues lors du parcours préfixe de l'arbre no 1.
 3. Donner dans l'ordre, les clés obtenues lors du parcours suffixe, également appelé postfixe, de l'arbre no 2.
 4. Donner dans l'ordre, les clés obtenues lors du parcours infixé de l'arbre no 3.
 5. Recopier et compléter les instructions ci-dessous afin de définir puis de construire, en y insérant les clés dans un ordre correct (il y a plusieurs possibilités, on en demande une) , les trois instances de la classe ABR qui correspondent aux trois arbres binaires de recherche représentés plus haut.

```
1 arbre_no1 = ...
2 arbre_no2 = ...
3 arbre_no3 = ...
4 for cle_a_inserer in [..., ..., ..., ..., ..., ..., ...]:
5     arbre_no1....
6 for cle_a_inserer in [..., ..., ..., ..., ..., ..., ...]:
7     arbre_no2....
8 for cle_a_inserer in [..., ..., ..., ..., ..., ..., ...]:
9     arbre_no3....
```

6. Voici le code de la méthode hauteur de la classe ABR qui renvoie la hauteur d'une instance d'ABR:

```
1     def hauteur(self):
2         if self.est_vide() :
3             return -1
4         else :
```

```

5         return 1 + max(self.sag().hauteur(),
6                        self.sad().hauteur())

```

Donner, en utilisant cette méthode, la hauteur des trois instances *arbre_no1*, *arbre_no2* et *arbre_no3* de la classe ABR définies plus haut et qui correspondent aux trois arbres représentés plus haut.

7. Recopier et compléter le code de la méthode `est_presente` ci-dessous qui renvoie `True` si la clé `cle_a_rechercher` est présente dans l'instance d'ABR et `False` sinon :

```

1     def est_present(self, cle_a_rechercher):
2         if self.est_vide() :
3             return ...
4         elif cle_a_rechercher == self.cle() :
5             return ...
6         elif cle_a_rechercher < self.cle() :
7             return ...
8         else :
9             return ...

```

8. Expliquer quelle instruction, parmi les trois ci-dessous, nécessitera le moins d'appels récursifs avant de renvoyer son résultat :

- `arbre_no1.est_presente(7).`
- `arbre_no2.est_presente(7).`
- `arbre_no3.est_presente(7).`

Partie B

9. On rappelle que la fonction `abs(x)` renvoie la valeur absolue de `x`. Par exemple :

```

>>> abs(3)
3
>>> abs(-2)
2

```

On donne la méthode `est_partiellement_equilibre(self)` de la classe ABR. Cette méthode renvoie `True` si l'instance de la classe ABR est l'implémentation d'un arbre partiellement équilibré et `False` sinon :

```

1     def est_partiellement_equilibre(self) :
2         if self.est_vide() :
3             return True
4         return abs(self.sag().hauteur() -
5                  self.sad().hauteur() ) <= 1

```

Expliquer ce qu'on appelle ici un arbre *partiellement équilibré*.

Un arbre binaire est *équilibré* s'il est partiellement équilibré et si ses deux sous-arbres, droit et gauche, sont eux-mêmes équilibrés. Un arbre vide est considéré comme équilibré.

10. Justifier que, parmi les trois arbres définis plus haut, deux sont partiellement équilibrés.
11. Justifier que, parmi les trois arbres définis plus haut, un seul est équilibré.
12. Définir et coder la méthode récursive `est_equilibre` de la classe `ABR` qui renvoie `True` si l'instance de la classe `ABR` est l'implémentation d'un arbre équilibré et `False` sinon.